Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщения
Кафедра физики

И. В. Поленц

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Часть 1

Екатеринбург
2006

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщения
Кафедра физики

И. В. Поленц

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Методическое пособие для студентов всех специальностей

Часть 1

«...многие явления, относящиеся к теории звука и колебаний, столь примечательны и занятны, что труд их исследователя будет сторицей вознагражден тем удовлетворением, которое он при этом получит».

Томас Юнг

Екатеринбург
2006

УДК 537.8

Данное методическое пособие представляет собой часть курса лекций по механике, включающую теоретические вопросы свободных и вынужденных гармонических колебаний. Оно предназначено для студентов первых и вторых курсов УрГУПСа и соответствует программе курса физики для вузов.

В конце каждой главы приведены списки рекомендуемой литературы и и вопросы для самоподготовки.

Все формулы и единицы измерения приведены в международной системе единиц СИ.

Пособие одобрено на заседании кафедры физики, протокол № 5 от 14.11.06.

Автор: И.В. Поленц, доцент кафедры физики, кандидат технических наук (УрГУПС)

Рецензент: А.С. Шишмаков, профессор кафедры физики, доктор технических наук (УрГУПС)

Оглавление

1. Колебательное движение. Гармонические колебания. Сложение колебаний

1.1. Типы колебаний

Колебания являются процессами, повторяющимися через одинаковые промежутки времени (при этом далеко не все повторяющиеся процессы являются колебаниями!). В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания механические, электромагнитные, электромеханические и т.п. При механических колебаниях периодически изменяются положения и координаты тел. При электрических – напряжение и сила тока. В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные колебания, вынужденные, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными (собственными) колебаниями называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити. Для того чтобы вызвать колебания, надо либо толкнуть шарик, либо, отведя в сторону, отпустить его.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы (например, колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу).

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако, моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой. То есть система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

Параметрические колебания осуществляются при периодическом изменении параметров колеблющейся системы (качающийся на качелях человек периодически поднимает и опускает свой центр тяжести, тем самым, меняя параметры системы). При определенных условиях система становится неустойчивой - случайно возникшее отклонение из положения равновесия приводит к возникновению и нарастанию колебаний. Это явление называется параметрическим возбуждением колебаний (т.е. колебания возбуждаются за счет изменения параметров системы), а сами колебания – параметрическими.

Несмотря на разную физическую природу, для колебаний характерны одни и те же закономерности, которые исследуются общими методами. Важной кинематической характеристикой является форма колебаний. Она определяется видом той функции времени, которая описывает изменение той или иной физической величины при колебаниях.

Наиболее важными являются такие колебания, при которых колеблющаяся
величина изменяется со временем *по закону синуса или косинуса*. Они называются *гармоническими*. Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам. Во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер очень близких к гармоническим. Во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение, или суперпозиция, гармонических колебаний.

1.2. Уравнение гармонического осциллятора

Гармоническое колебание описывается периодическим законом:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1)$$

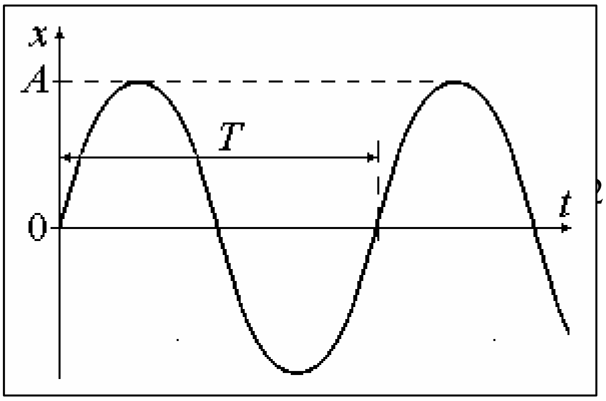


Рис. 1. Гармоническое колебание

Здесь $x(t)$ - обобщенная координата, смещение системы от положения равновесия в момент времени *t*, она характеризует *изменение* какой-либо физической величины при колебаниях (смещение маятника из положения равновесия; напряжение на конденсаторе в колебательном контуре и т.д.); *A* - *амплитуда колебаний*, максимальное смещение из положения равновесия; $\omega_0 t + \varphi_0$ - *фаза колебаний*; φ_0 - *начальная фаза*; ω_0 - *циклическая частота,* ее называют также *собственной* частотой колебаний. Такое название подчеркивает, что эта частота определяется параметрами колебательной системы. Система, закон движения которой имеет вид (1), называется *одномерным гармоническим осциллятором*.

Помимо перечисленных величин для характеристики колебаний вводят понятия *периода* $T = 2\pi/\omega_0$, т.е. времени одного колебания, и *частоты* $\nu = 1/T = \omega_0/2\pi$, определяющей число колебаний в единицу времени. За единицу частоты принимается частота такого колебания, период которого равен 1 с. Эту единицу называют *герцем* (*Гц*). Дифференцируя дважды по времени уравнение (1), получаем соотношение

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (2)$$

называемое *уравнением одномерного классического гармонического осциллятора* с частотой ω_0. Это дифференциальное уравнение имеет второй порядок, поэтому у него есть два независимых решения. Одно из них - $A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Другим независимым решением является $A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Общее решение уравнения (2) можно записать как линейную комбинацию независимых решений

$$C_1 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + C_2 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{3}$$

Часто полагают, что $C_1 = 1$, $C_2 = -i$. Тогда в соответствии с формулой Эйлера ($\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$) выражение (3) может быть записано в виде

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - iA\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\exp(-i(\omega_0 t + \varphi_0)). \tag{4}$$

Такой *комплексной формой* записи закона гармонического колебания широко пользуются. Это связано с удобством работы с экспоненциальной функцией. Так как наблюдаемые значения каждой физической величины вещественны, то наблюдаемый закон гармонических колебаний может быть получен из (4) взятием вещественной части от величины *z(t)*, которая называется *комплексным вектором колебаний*: $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$.

Первая и вторая производные по времени от гармонически колеблющейся величины также совершают гармонические колебания той же частоты:

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \tag{5}$$

Амплитуды $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ равны соответственно $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$. Колебание $\dot{x}(t)$ опережает $x(t)$ по фазе на $\frac{\pi}{2}$; а колебание $\ddot{x}(t)$ опережает $x(t)$ на π. Значения *A* и φ_0 могут быть определены из заданных начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$

$$A = \sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right)^2}, \qquad tg\varphi_0 = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)^2}. \tag{6}$$

1.3. Пружинный маятник. Колебательный контур. Энергия колебаний осциллятора

Что происходит с *энергией колебаний*? В качестве примера гармонических колебаний рассмотрим одномерные колебания, совершаемые телом массы m под действием *квазиупругой* силы $F_x = -kx$ (пружинный маятник, рис. 2).

Уравнение таких колебаний имеет вид (2) с собственной частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Квазиупругая сила является *консервативной*. Поэтому полная механическая энергия таких гармонических колебаний остается постоянной. В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии $E_к$ в потенциальную $E_п$ и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия равна максимальному значению потенциальной энергии, а при прохождении системы через положение равновесия полная энергия равна максимальному значению кинетической энергии.

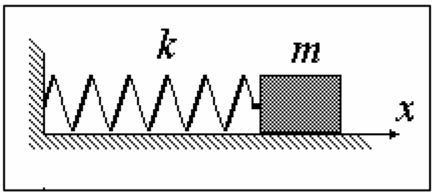


Рис. 2. Пружинный маятник

Выясним, как изменяется со временем кинетическая и потенциальная энергия:

$$E_к = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (7)$$

$$E_п = \frac{mx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (8)$$

Сложив (7) и (8) и учтя, что $m\omega_0^2 = k$, получим для полной энергии

$$E = E_к + E_п = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \qquad (9)$$

Таким образом, полная энергия гармонического колебания постоянна. Из соотношений (7) и (8) также следует, что средние значения кинетической и потенциальной энергии равны друг другу и половине полной энергии, поскольку средние значения $\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ и $\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ за период равны 0,5. Используя тригонометрические формулы, можно получить:

$$E_к = E\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}E[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)],$$

$$E_п = E\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}E[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \qquad (10)$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергия изменяются с частотой $2\omega_0$, т.е. с частотой в два раза превышающей частоту гармонического колебания.

Другими примерами гармонических колебаний механической природы являются *математический* и *физический* маятники. Для математического маятника (материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной l в поле силы тяжести с ускорением свободного падения равным g) при малых углах отклонения (не превышающих 5-10 угловых градусов) от положения равновесия уравнение движения принимает вид (2), где собственная частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Колебания физического маятника (твердого тела массы m, колеблющегося вокруг оси, отстоящей от центра масс на расстояние d) при аналогичных условиях также являются гармоническими с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$. В этом выражении $\tilde{I}$ - момент инерции маятника относительно оси колебаний.

В качестве примера колебаний иной физической природы рассмотрим колебания электромагнитного поля в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 3).

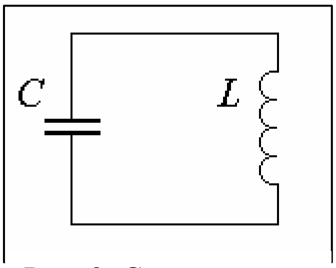


Рис. 3. Схема колебательного контура

Уравнение колебаний имеет вид, аналогичный (2)

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega_0{}^2 q(t) = 0 \quad . \qquad (11)$$

В этом случае $q(t)$ - заряд конденсатора, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (*формула Томсона*).

Решение уравнения (11) имеет вид

$$q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \, . \qquad (12)$$

Выражения для напряжения на конденсаторе и тока в катушке могут быть получены, исходя из соотношений $U = \frac{q(t)}{C}$ и $I = \dot{q}(t)$. Уравнение (11) получается из условия равенства ЭДС самоиндукции катушки падению напряжения на конденсаторе (это равенство очевидным образом связано с законом Ома для полной цепи). ЭДС самоиндукции равна

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2} \qquad (13)$$

и условие $\varepsilon = U$ дает уравнение (12).

Энергия электрического и магнитного поля определяется выражениями:

$$W_e = \frac{q(t)^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \, ,$$

$$W_m = \frac{LI(t)^2}{2} = \frac{1}{2}L\omega_0{}^2Q^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{Q^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad . \qquad (14)$$

Полная энергия

$$W = W_e + W_m = \frac{Q^2}{2C} = \frac{L\omega_0{}^2Q^2}{2C} \qquad (15)$$

и в этом случае остается постоянной, а средние значения W_e и W_m одинаковы и равны половине полной энергии. Частота колебаний W_e и W_m составляет $2\omega_0$.

1.4. Сложение однонаправленных колебаний одинаковой частоты

Задача *сложения нескольких колебаний* может возникнуть, например, в оптике, где световые колебания (колебания вектора напряженности электрического поля) в некоторой точке определяются как результат наложения многих колебаний, приходящих в данную точку от различных участков волнового фронта.

Под сложением колебаний понимают нахождение результирующих колебаний системы в тех случаях, когда эта система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах. Различают два предельных случая:

- *сложение колебаний одинакового направления;*
- *сложение взаимно перпендикулярных колебаний.*

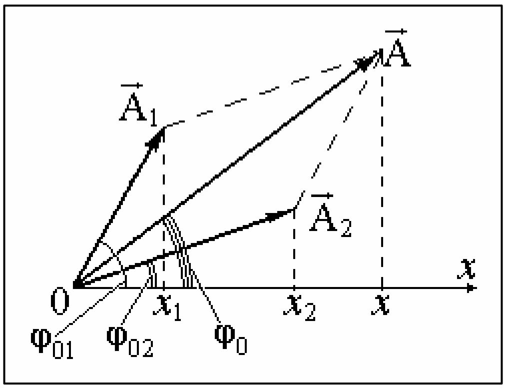


Рис. 4. Сложение комплексных векторов на диаграмме

Рассмотрим первый случай – сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и частоты. Для сложения колебаний удобно применять метод векторных диаграмм. Суть этого метода в том, что гармоническое колебание представляется при помощи вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью *OX* угол, равный фазе колебания. Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания определяются при помощи векторного сложения. Допустим, что требуется сложить два гармонических колебания

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) \text{ и } x_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}) \quad . \qquad (16)$$

Сложим соответствующие им векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ для момента времени *t*. Проекция результирующего вектора на ось O*x* равна сумме проекций складываемых векторов $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Вектор $\vec{A}$ представляет собой *векторное изображение результирующего колебания* (рис. 4).

Этот вектор в плоскости диаграммы вращается с той же частотой ω_0, с которой колеблются складываемые осциллирующие функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Результирующая амплитуда A и начальная фаза φ_0 находятся геометрическим построением для момента времени $t = 0$:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos[\pi - (\varphi_{01} - \varphi_{02})] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \qquad (17)$$

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}. \qquad (18)$$

Выделим три характерных случая:

- Если разность начальных фаз $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ обоих колебаний равна 0 или 2πn, где n = 1, 2, … , то колебания находятся в фазе и амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний, $A = A_1 + A_2$.
- Если разность фаз $\pm\pi$, т.е. оба колебания находятся в противофазе, то $A = |A_1 - A_2|$ (при $A_1 = A_2$ наблюдается полное гашение колебаний).
- Если частоты складываемых колебаний не одинаковы, то результирующий вектор пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью. В этом случае результирующее колебание не будет гармоническим и описывается другими более сложными зависимостями.

1.5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим сложение *взаимно перпендикулярных* колебаний на примере механических колебаний. Допустим, что материальная точка может совершать колебания как вдоль оси Оx, так и вдоль перпендикулярной к ней оси Оy. Если возбудить оба колебания, материальная точка будет двигаться по некоторой, вообще говоря, криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна 0. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t \quad \text{и} \quad y(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (19)$$

φ_0 – разность начальных фаз обоих колебаний. Выражения (19) представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений (19) время. Из первого уравнения (19) следует, что

$$\cos\omega_0 t = \frac{x}{A}, \qquad (20)$$

Поэтому

$$\sin\omega_0 t = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}} \,. \qquad (21)$$

Представим далее косинус во втором уравнении (19) по формуле для косинуса суммы, подставляя при этом вместо $\cos\omega_0 t$ и $\sin\omega_0 t$ их значения из соотношений (20) и (21). В результате получим

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\varphi_0=\sin^2\varphi_0 \,. \qquad (22)$$

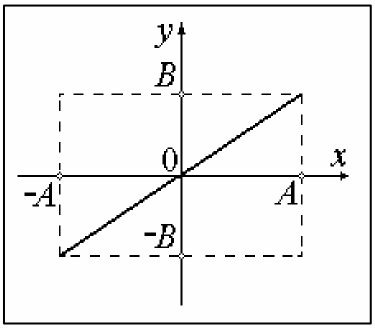


Рис. 5. Вид траектории для разности фаз, равной нулю

Выражение (22) - это уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей Оx и Оy. Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд A и B и разности фаз φ_0. Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз равна нулю. В этом случае уравнение (22) примет вид:

$$\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2=0 \,, \qquad (23)$$

откуда получается уравнение прямой (рис. 5):

$$y=\frac{B}{A}x \,. \qquad (24)$$

Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль этой прямой с частотой ω_0 и амплитудой равной $\sqrt{A^2+B^2}$.

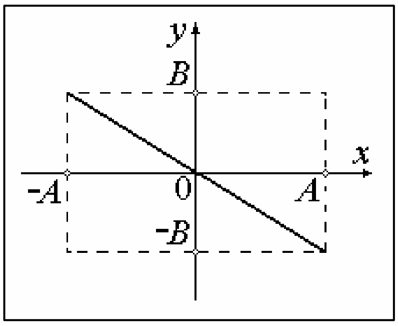


Рис. 6. Вид траектории для разности фаз, равной π

2. Разность фаз равна $\pm\pi$. В этом случае уравнение (22) примет вид

$$\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)^2=0 \,. \qquad (25)$$

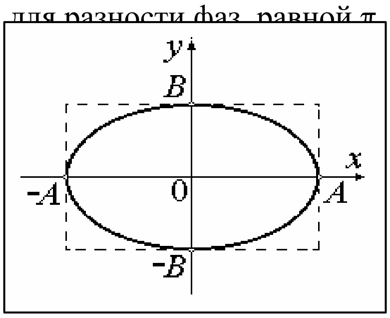


Рис. 7. Вид траектории для разности фаз, равной $\pm\pi/2$

Откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис.6).

$$y=-\frac{B}{A}x \,.$$

(26)

Движения, описываемые формулами (24) и (26) называют *линейно поляризованными колебаниями*.

3. При разности фаз равной $\pm\pi/2$ уравнение (6.5.4) переходит в следующее

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \tag{27}$$

т.е. в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний A и B (рис. 7). В этом случае говорят об *эллиптически поляризованных колебаниях*. При равенстве амплитуд ($A = B$) эллипс превращается в окружность. Колебания, описываемые уравнением (27) при ($A = B$) называются *поляризованными по кругу* или *циркулярно поляризованными*. Случаи разности фаз $+\pi/2$ и $-\pi/2$ отличаются направлением движения по эллипсу или по окружности. В первом случае тело движется по часовой стрелке, во втором – против часовой стрелки.

Если представить, что вместо колебаний материальной точки речь идет о колебаниях вектора напряженности электрического (или магнитного поля), то все изложенное в разделе 5 соответствует сложению двух колебаний поля, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Результат такого сложения, наблюдаемый на экране осциллографа, имеет вид эллипса. Этот эллипс является одной из *фигур Лиссажу*. Более сложные фигуры Лиссажу (восьмерка, седло и т.д.) соответствуют сложению взаимно перпендикулярных колебаний кратных частот.

Рекомендуемая литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. Пособие: для вузов. В 5 кн. Кн.2. Электричество и магнетизм – 4-е изд., перераб.– М.: Наука, Физматлит,, 1998, сс. 310–313.
2. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. Пособие: для вузов.– 5-е изд., стер.– М.: Высш. шк., 1998, сс. 255–267.
3. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: Учеб. пособие для вузов.– 2-е изд., испр. и доп.– М.: Высш. шк., 1999, сс. 358–370.
4. Иродов И. Е. Механика. Основные законы.– 5-е изд., испр.–М.: Лаборатория базовых знаний, 2000, сс. 205–223.
5. Иродов И. Е. Механика колебательных систем.– 3-е изд., испр.–М.: Лаборатория базовых знаний, 2000, сс. 311–320.

Вопросы для самоподготовки

1. Покажите, что при гармонических колебаниях не только сама колеблющаяся величина, но и скорость и ускорение ее изменения совершают гармонические колебания.
2. Получите уравнение движения одномерного гармонического осциллятора.

3. Покажите, что амплитуда и начальная фаза колебаний гармонического осциллятора определяются его начальным состоянием.

4. В чем различие колебаний, получающихся в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты и мало различающихся частот?
5. Чем различаются результаты сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты и направленных вдоль одной прямой и взаимно перпендикулярных?
6. При каких условиях в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты получаются колебания поляризованные по эллипсу, кругу и линейно?
7. Покажите, что равномерное вращение материальной точки по окружности можно представить как результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний.
8. Что такое собственная частота гармонического осциллятора и от чего она зависит?
9. Какая разница между математическим и физическим маятниками?
10. На примере пружинного маятника покажите, что гармонический осциллятор представляет собой консервативную систему.
11. На примере идеального колебательного контура покажите, что гармонический осциллятор представляет собой консервативную систему.
12. Математический маятник длиной l =1 *м* подвешен к потолку кабины, которая начинает опускаться вертикально вниз с ускорением $a = g$ /4.Определить период T малых колебаний маятника.
13. Что изменится в уравнении гармонических колебаний, если на векторной диаграмме вращать вектор амплитуды по часовой стрелке?
14. От чего зависит амплитуда и начальная фаза гармонических механических колебаний?
15. В каком случае начальная фаза гармонических механических колебаний равна 0 и $\pi/2$?
16. Можно ли с помощью векторной диаграммы найти результат сложения трех одинаково направленных гармонических колебаний одной частоты?
17. Как получить эллиптически поляризованные колебания?
18. Как получить колебания, поляризованные по кругу?
19. Назовите примеры колебаний, которые Вы наблюдали в окружающей действительности
20. Можно ли считать гармоническим колебательным процессом суточное вращение Земли вокруг своей оси, годичное – относительно Солнца?
21. Можно ли считать колебания дыхательной и сердечной деятельности гармоническими?
22. Покажите, что амплитуда и начальная фаза колебаний гармонического осциллятора определяются его начальным состоянием.
23. Материальная точка массой 25 *г* совершает гармонические колебания с амплитудой 10 *см* и частотой 1 *Гц*. Чему равна ее кинетическая энергия и действующая на нее сила в тот момент, когда ее смещение от положения равновесия равно 5 *см*?
24. Математический маятник, состоящий из нити длиной l = 0,5 *м* и свинцового шарика массой m = 50 *г*, совершает гармонические колебания с амплитудой x_0 = 5 *см*. Определить скорость шарика при прохождении им положения равновесия; максимальное значение возвращающей силы.
25. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень массы m длиной l. Определить частоту колебаний маятника, если точка подвеса находится от центра масс на расстоянии x. Момент стержня относительно середины- $I = ml^2/12$.
26. Два математических маятника имеют одинаковые массы и колеблются с одинаковыми угловыми амплитудами. Длина первого маятника l_1 в 2 раза больше длины второго маятника l_2. Определить, какой из маятников обладает большей энергией и во сколько раз.

27. Тонкий однородный стержень длиной l = 40 *см* может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Стержень отклонили на угол α_0 = 0,01 *рад* и в момент времени t = 0 отпустили. Считая колебания малыми, запишите функцию $\alpha(t)$. Момент инерции стержня относительно середины $I = ml^2/12$.

28. Коэффициент жесткости пружины равен 10 *Н/см*, а масса груза 1 *кг*. Каковы были начальные значения смещения и скорости груза, если амплитуда колебаний 5 *см*, а начальная фаза 60°.
29. Найти амплитуду, период и фазу гармонических колебаний материальной точки в тот момент, когда ее смещение равно 10 *см*, скорость 10 *см/с* и ускорение 10 *см/с*^{2}.

2. Свободные и вынужденные колебания
2.1. Затухание свободных колебаний

Затуханием колебаний называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой. Закон затухания колебаний зависит от свойств колебательной системы. Система называется *линейной*, если параметры, характеризующие существенные в рассматриваемом процессе физические свойства системы, не изменяются в ходе процесса. *Свободные затухающие* колебания линейной системы описываются уравнением

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0{}^2 x(t) = 0, \qquad (28)$$

где γ - *коэффициент затухания*, ω_0 - *собственная частота* системы, т.е. частота, с которой совершались бы колебания в отсутствии затухания. Выражение коэффициента затухания через параметры системы зависит от вида колебательной системы. Например, для пружинного маятника $2\gamma = \frac{r}{m}$ где r - коэффициент сопротивления, т.е. коэффициент пропорциональности между скоростью и силой сопротивления. Для затухающих колебаний в колебательном контуре (рис. 8): $2\gamma = \frac{R}{L}$, где R - величина активного сопротивления контура.

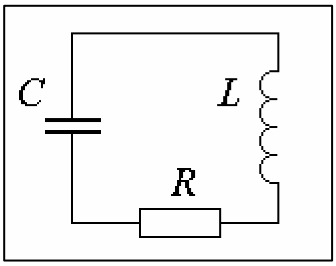


Рис. 8. Колебательный контур с активным сопротивлением

Для решения уравнения (28) производится подстановка $x = \lambda t$. Эта подстановка приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0{}^2 = 0, \qquad (29)$$

которое имеет два корня:

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0{}^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0{}^2}. \qquad (30)$$

При не слишком большом затухании ($\gamma < \omega_0$) подкоренное выражение будет отрицательным. Если его представить в виде $(i\omega)^2$, где ω - вещественная положительная величина, называемая циклической частотой затухающих колебаний и равная $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2}$, то корни уравнения (29) запишутся в виде

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega \text{ и } \lambda_1 = -\gamma - i\omega. \qquad (31)$$

Общим решением уравнения (29) будет функция

$$x(t) = C_1 \exp((-\gamma + i\omega)t) + C_2 \exp((-\gamma - i\omega)t) =$$
$$= (C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t)) \exp(-\gamma t), \qquad (32)$$

которую можно представить в виде:

$$x(t) = a_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \alpha), \qquad (33)$$

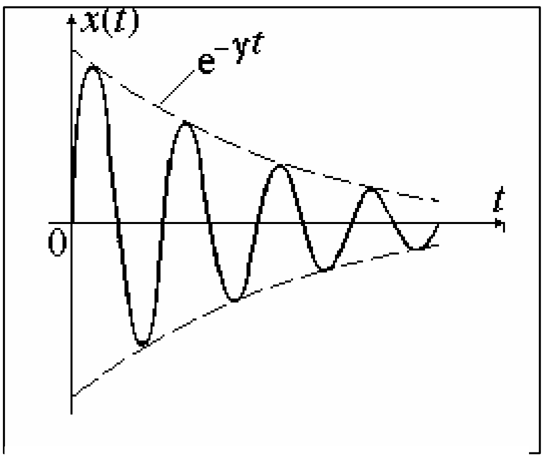


Рис. 9. Затухающие колебания

где a_0 и α - произвольные постоянные.

В соответствии с (33) движение системы можно условно рассматривать как гармоническое колебание (рис. 9) частоты ω с амплитудой, изменяющейся по закону

$$a(t) = a_0 \exp(-\gamma t). \qquad (34)$$

Скорость затухания колебаний определяется коэффициентом затухания γ. В соответствии с выражением (34) коэффициент затухания обратно пропорционален промежутку времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в «е»=2,718 раз.

Период затухающих колебаний определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \qquad (35)$$

При незначительном затухании ($\gamma \langle\langle \omega_0$) период колебаний практически равен $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. С ростом γ период увеличивается.

Из соотношения (35) следует, что $\dfrac{a(t)}{a(t+T)} = \exp(\gamma T)$. Такое отношение амплитуд называется *декрементом затухания*, а его натуральный логарифм - *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \gamma T. \qquad (36)$$

Логарифмический декремент затухания обратно пропорционален числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в «*е*» раз.

Помимо рассмотренных величин для характеристики колебательной системы употребляется величина $Q \cong \dfrac{\pi}{\lambda}$, называемая *добротностью колебательной системы*. Добротность пропорциональна числу колебаний, совершаемых системой за то время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в «е» раз. Большим значениям добротности соответствует малое затухание.

Энергия колебательной системы убывает со временем. Это обусловлено наличием затухания. При малом затухании ($\gamma \langle\langle \omega_0$) энергия изменяется по закону:

$$E = E_0 \exp(-2\gamma t), \qquad (37)$$

где E_0 - значение энергии в начальный момент.

Можно показать, что при слабом затухании добротность с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент времени, к убыли этой энергии за один период колебаний. С ростом γ период колебаний увеличивается. При $\gamma = \omega_0$ период обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим. При $\gamma \rangle \omega_0$ выведенная из положения равновесия система возвращается в него, не совершая колебаний.

2.2. Метод фазовых траекторий

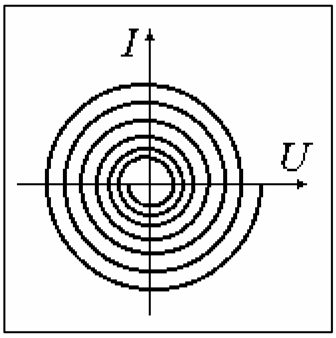


Рис. 10.Фазовая кривая

В ряде случаев удобно изучать колебательные процессы в системе координат $(x, \frac{dx}{dt})$. Плоскость таких координат называется *плоскостью состояний* или *фазовой плоскостью*, а кривая, изображающая зависимость этих координат - *фазовой кривой* (*фазовой траекторией*). В механике такими координатами являются перемещение и скорость, а для электромагнитных колебаний в контуре – ток и напряжение.

Фазовая траектория затухающих колебаний описывается в параметрической форме системой из двух уравнений:

$$\begin{cases} x = a_0 \exp(-\gamma t) \cos \omega t, \\ \dfrac{dx}{dt} = b_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \psi) \end{cases}, \qquad (38)$$

где ψ - сдвиг фаз между $\frac{dx}{dt}$ и x. При отсутствии затухания $\psi = \pi/2$. В этом случае фазовая кривая представляет собой эллипс, как и в случае сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с постоянными амплитудами, сдвинутых по фазе на четверть периода. При наличии затухания фазовая кривая получается незамкнутой. На рис. 10 приведена фазовая кривая для затухающих колебаний в колебательном контуре.

2.3. Вынужденные колебания при гармоническом внешнем воздействии. Резонанс колебаний

Когда на колебательную систему оказывается периодическое внешнее воздействие, подчиняющееся гармоническому закону, колебания описываются уравнением вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0{}^2 x(t) = f_0 \cos\Omega t\,, \qquad (39)$$

где так же, как и для случая затухающих свободных колебаний, γ - коэффициент затухания, ω_0 - собственная частота системы, т.е. частота, с которой совершались бы колебания в отсутствии затухания, Ω- *частота вынуждающего воздействия на систему*.

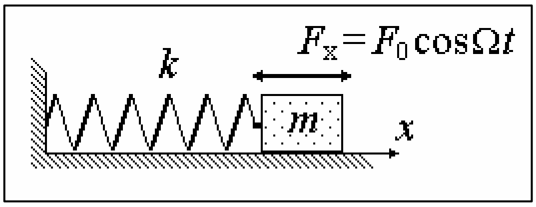


Рис.11. Пружинный маятник с вынуждающей силой

Выражение для коэффициента f_0 зависит от вида колебательной системы и внешнего воздействия. Например, для пружинного маятника $f_0 = \frac{F_0}{m}$, где F_0 - *амплитуда вынуждающей силы* (рис. 11). Для вынужденных колебаний в колебательном контуре: $f_0 = \frac{E_0}{L}$, где E_0 - амплитуда переменного напряжения, подаваемого на колебательный контур, L - индуктивность (рис. 12).

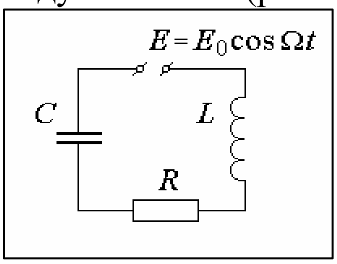


Рис.12. Колебательный контур с вынуждающим воздействием

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (39) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (33) и частного решения неоднородного уравнения. Эти два слагаемых соответствуют свободным затухающим колебаниям и незатухающим колебаниям с частотой вынуждающей силы.

По истечении некоторого промежутка времени решение уравнения (39) будет совпадать с частным решением.

Описываемый им режим движения называется установившимся режимом вынужденных колебаний. Соответствующее выражение имеет вид

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}\cos(\omega\, t - \mathrm{arctg}\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2})\,. \qquad (40)$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы:

$$a(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}\,. \qquad (41)$$

Величина

$$\varphi = arctg\,\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2} \qquad (42)$$

характеризует отставание по фазе вынужденного колебания от обусловившего это колебание внешнего воздействия.

Следует отметить, что установившиеся колебания происходят с частотой вынуждающего воздействия Ω, а не с собственной частотой. При Ω = 0 выражение (41) дает статическое отклонение

$$a(0) = \frac{f_0}{\omega_0{}^2}\,. \qquad (43)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающего воздействия (рис. 12) приводит к тому, что при некоторой определенной для данной колебательной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего воздействия к некоторому значению называют явлением *резонанса* (*резонансом*). *Резонансную частоту* $\Omega_{рез}$ находят, приравнивая нулю производную $\dfrac{da(\Omega)}{d\Omega} = 0$, откуда

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\gamma^2}\,, \qquad (44)$$

$$a_{рез} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{(\omega_0{}^2 - \gamma^2)}}\,. \qquad (45)$$

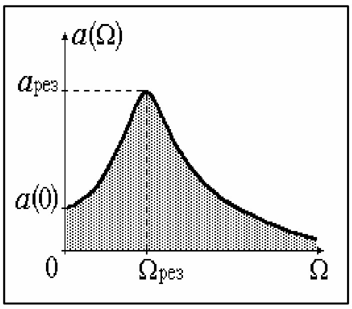


Рис. 12. Резонансная кривая

Для механических колебаний при резонансной частоте внешнего воздействия, определяемой по формуле (44), достигается максимум амплитуды смещения колеблющейся величины $x(t)$, для электромагнитных колебаний в контуре максимум

амплитуды заряда *q(t)*.Максимум амплитуды производной $\dfrac{dx(t)}{dt}$ (соответственно, скорости или тока) достигается при $\Omega = \omega_0$.

Максимум амплитуды второй производной $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ (соответственно, ускорения или напряжения на катушке индуктивности) достигается при $\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \gamma^2)}}$. Максимум средней мощности внешнего воздействия (для механических колебаний максимум мощности внешней силы $P = F\frac{dx(t)}{dt} = Fv$) достигается при $\Omega = \omega_0$. Если затухание невелико, то положения всех перечисленных максимумов почти не отличаются друг от друга. При малом затухании:

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega_0}, \quad \frac{a_{\text{рез}}}{a(0)} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q. \tag{46}$$

В данном случае, добротность Q показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса $a_{\text{рез}}$ превышает отклонение системы от положения равновесия $a(0)$ под действием постоянного воздействия той же величины, что и амплитуда вынуждающего воздействия. Это утверждение справедливо только при малом затухании. Зависимость $a(\Omega)$ называется *резонансной кривой* (см. рис. 12).

В установившемся режиме вынужденных колебаний энергия колебательной системы остается неизменной. Система непрерывно поглощает от источника внешнего воздействия энергию, которая восполняет потери, связанные с наличием затухания (сила трения при механических колебаниях, выделение теплоты на активном сопротивлении при колебаниях в контуре).

Найдем среднюю энергию, поглощаемую в единицу времени. Вычисления проведем для пружинного маятника при наличии силы трения и периодически изменяющейся внешней силы. При смещении груза на dx внешняя сила совершит работу Fdx.

Работа, совершенная в единицу времени, будет равна $F\frac{dx}{dt} = Fv$. Среднее значение поглощаемой в единицу времени энергии равно

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T F\frac{dx}{dt}\,dt. \tag{47}$$

Здесь усреднение производится по одному периоду колебаний $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Подставляя в интеграл (47) выражение для силы $F = F_0\cos\Omega t$ и производную от смещения $x(t)$ из выражения (40), получаем

$$P = P(\Omega) = -F_0 \Omega\, a(\Omega) \frac{1}{T} \int_0^T \cos\Omega\, t \sin(\Omega t + \varphi) dt \quad , \qquad (50)$$

где величина φ определяется выражением (42). После интегрирования находим:

$$P = P(\Omega) = -0.5 F_0 \Omega a(\Omega) \sin\varphi \, . \qquad (51)$$

Преобразование $\sin\varphi$ с учетом (42) приводит к выражению

$$\sin\varphi = \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^{\ 2} - \Omega^2} \right) = \frac{2\gamma\Omega}{f_0} a(\Omega) \, . \qquad (52)$$

Учитывая, что $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$, получаем

$$P = P(\Omega) = -\gamma m [\Omega a(\Omega)]^2 \, . \qquad (53)$$

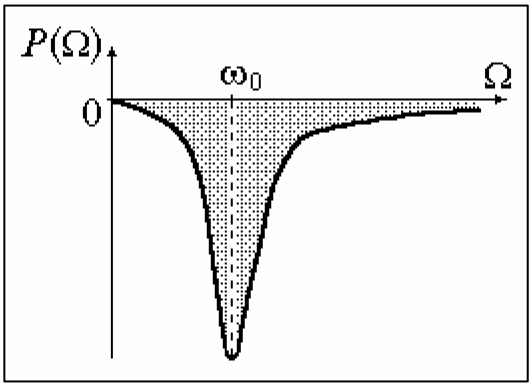


Рис. 13. Зависимость поглощенной энергии от частоты

Как видно, поглощаемая в единицу времени энергия P зависит от частоты Ω. Так как $a(\Omega)$ имеет резонансный пик – максимум, то $P(\Omega)$ имеет резонансный пик – минимум (рис. 13) Поэтому измерения зависимости поглощенной энергии от частоты позволяют обнаружить резонансные явления и установить собственные частоты осциллирующих систем.

Рекомендуемая литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. Пособие: для вузов. В 5 кн. Кн.2. Электричество и магнетизм – 4-е изд., перераб.– М.: Наука, Физматлит, 1998, сс. 313–325.
2. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. Пособие: для вузов.– 5-е изд., стер.– М.: Высш. шк., 1998, сс. 267–276.
3. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: Учеб. пособие для вузов.– 2-е изд., испр. и доп.– М.: Высш. шк., 1999, сс. 371–384.
4. Иродов И. Е. Механика колебательных систем.– 3-е изд., испр.–М.: Лаборатория базовых знаний, 2000, сс. 311–325.

Вопросы для самоподготовки

1. Как влияет коэффициент затухания на период затухающих колебаний?
2. Какова связь между добротностью колебательной системы и ее логарифмическим декрементом затухания?
3. Чему равен логарифмический декремент незатухающих колебаний?
4. Как влияет активное сопротивление, индуктивность и емкость на резонансные характеристики контура?
5. Сравните колебательный контур с колебательной системой - груз на пружинке. Установите аналогию между величинами, характеризующими эти колебания.

6. Почему так важен случай гармонического внешнего воздействия на колебательную систему?
7. От чего и как зависит скорость вынужденных колебаний?
8. В чем различие резонансных кривых для смещения и скорости при вынужденных колебаниях?
9. Покажите, что средние за период мощности диссипативной и вынуждающей сил компенсируют друг друга.
10. Покажите, что поглощение энергии осциллятором при вынужденных колебаниях имеет резонансный характер, от чего зависит ширина линии поглощения?
11. В чем преимущества представления гармонических колебаний в комплексной форме и как это сочетается с вещественностью наблюдаемых значений любой физической величины?
12. В чем суть метода векторных диаграмм при рассмотрении гармонических колебаний?
13. Что является причиной затухания колебаний реальных осцилляторов?
14. При каких условиях пружинный маятник будет совершать затухающие колебания, и от чего будут зависеть их характеристики?
15. В чем состоит физический смысл таких характеристик реальных осцилляторов как логарифмический декремент затухания и время релаксации?
16. Какие физические особенности колебательных процессов в реальных осцилляторах можно связать с их добротностью?
17. Почему незатухающие колебания реальных осцилляторов могут быть только вынужденными?
18. От чего и как зависит сдвиг по фазе между вынужденным колебанием и вынуждающей силой?
19. От чего и как зависит амплитуда вынужденных колебаний?
20. Что такое резонансная частота вынужденных колебаний, от чего она зависит?

3. Элементы физики волновых процессов
3.1 Общие сведения о волнах. Упругие волны

Пусть некоторая физическая величина ξ (например, ξ может быть координатой точки струны, давлением, плотностью газа или жидкости, напряженностью электрического или магнитного поля и т.д.) колеблется во времени, причем это колебание не сосредоточено в определенном месте, а распределено в некоторой, достаточно большой области пространства. Для определенности, в этом параграфе мы будет говорить о колебаниях плотности некоторой упругой среды, например, жидкости или газа. Соседние области среды механически взаимодействуют между собой.

В результате колебания, возбужденные в какой-либо точке среды, передаются от одной точки среды к другой и оказываются распределенными по среде. Колебания плотности среды (и связанные с ними колебания давления) совершаются частицами среды (молекулами). Чем дальше расположена частица от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Если колебания начались уже давно, то это не значит, что процесс распространения колебаний заканчивается. Распространение колебаний от источника выражается в переносе фазы колебания. Фазы (т.е. стадии) колебаний данной частицы среды и источника тем больше отличаются друг от друга, чем больше расстояние от частицы до источника. Иными словами, колебания во всех точках среды повторяют колебание величины ξ в области источника с определенным запаздыванием, которое тем больше, чем больше расстояние от источника до точки среды.

При изучении распределенных колебаний в упругой среде обычно не учитывают дискретное (молекулярное) строение среды и не рассматривают колебательное движение отдельных молекул. Среда рассматривается как сплошная и обладающая упругими свойствами. *Процессы распространения колебаний упругой среды* называются *упругими волнами*. Важно отметить, что от точки к точке в среде передаются именно колебания (в данном случае, колебания плотности) и их (в данном случае кинетическая) энергия, а не поток вещества. Частицы колеблются около своих положений равновесия, т.е. в упругих волнах (как, впрочем, и во всех волновых процессах) происходит *перенос энергии без переноса вещества*.

Упругие волны бывают *продольные и поперечные*. В поперечных волнах молекулы колеблются поперек направления распространения волны, а в продольных – вдоль него. С точки зрения теории волн, трактующей среду как сплошную, продольные упругие волны – это распространение деформации сжатия и растяжения. Распространение колебаний плотности в жидких и газообразных средах относятся именно к продольным волнам. В твердых телах упругие волны могут быть как продольными, так и поперечными. Поперечные упругие волны – это распространение деформации сдвига, возможное только в твердых телах. При этом в направлении, поперечном относительно направления распространения колебаний, происходят деформации кристаллической решетки (сдвиг ее ячеек друг относительно друга). Иногда к поперечным волнам относят колебания струны, рассматривая струну как специфический одномерный случай среды.

Если колебания во всем пространстве имеют одинаковый период T (а значит, и одинаковую частоту $\omega=2\pi/T$), волна называется монохроматической. Если при распространении колебаний не происходит потерь их энергии (например, переход энергии колебаний в тепло), то колебания по мере удаления от источника не затухают, и амплитуда

колебаний повсюду оказывается одинаковой. Такая волна называется *незатухающей*. На практике упругие волны обладают конечным, хотя обычно малым, затуханием. Упругие волны с частотой $\nu = \omega/2\pi = 16 \div 20000\,\textit{Гц}$ называются *звуковыми* или *акустическими*. Они воспринимаются человеческим ухом. В звуковой волне колебание в каждой точке среды совершает не только плотность среды, но и давление, а также температура. Процесс распространения звуковой волны через газ является практически адиабатическим процессом. Распределение давления звуковой волны в пространстве называется *звуковым полем*.

3.2. Волновая функция. Гармоническая волна. Параметры гармонической волны

Математически процесс распространения волны вдоль некоторой оси x описывается так называемой *волновой функцией* вида $\xi = f(x-ut)$, где f – любая функция аргумента $x-ut$ (на практике, впрочем, ее значения не могут быть бесконечными). *Линия, вдоль которой распространяются волна* (в однородных средах это прямая линия) называется *лучом*.

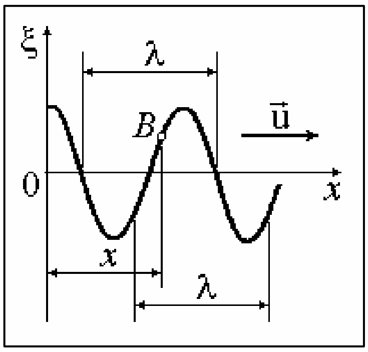


Рис. 14 График бегущей волны

В нашем примере лучом является ось x. Параметр u называется фазовой скоростью волны. Если распространяющееся колебание – гармоническое, т.е. в каждой точке пространства происходит по закону синуса (косинуса), то для волновой функции бегущей волны имеем

$$\xi(x,t)=A\sin(kx-\omega t-\alpha), \qquad (54)$$

где ω – частота колебаний, α – некоторая константа (начальная фаза), а через k обозначена величина ω/u. Параметр k называется *волновым числом.* Как видно из (54), и временная и пространственная зависимость гармонической волны – синусоиды. Если в (54) зафиксировать t, то зависимость волновой функции от x дает как бы моментальную фотографию волны (застывшую синусоиду). Пространственный период ее, т.е. расстояние между точками, в которых совпадает значение ξ и значение ее производной по координате, называется *длиной волны* и обозначается обычно буквой λ (рис. 14). График $\xi(x)$ похож на график гармонического колебания, однако, отличается по существу.

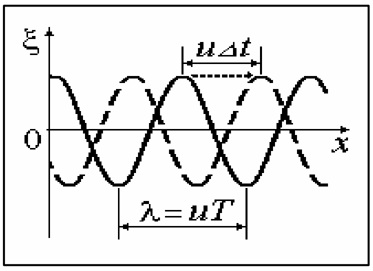


Рис. 15. Две последовательные «моментальные фотографии» волны

Для упругой волны он дает зависимость плотности (т.е. картину сгущений и разрежений среды) от координаты x. График колебаний, например, в точке В с координатой x дает зависимость плотности среды в этой точке от времени. Картину распространения волны можно представить, если застывшую синусоиду на рис. 14 привести в движение вдоль оси x со скоростью u. Две последовательные “моментальные фотографии” волны в моменты времени t и $t+\Delta t$ показаны на рис. 15. Точка волны с определенной фазой, например, точка максимума ξ на рис. 15, смещается за это время на расстояние $u\Delta t$. Легко видеть, что $\lambda = uT = 2\pi/k$.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к данному моменту времени t называется *волновым фронтом*. Геометрическое место точек, находящихся в одинаковой фазе колебания, называется *волновой поверхностью*. Волновая поверхность, на которой колебание находится в максимальной фазе, называется *гребнем волны*. Гребни, как и все волновые поверхности, движутся со скоростью u (см. рис. 15).

Как можно проверить непосредственной подстановкой выражения (54), гармоническая волновая функция подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0, \qquad (55)$$

Это уравнение – частный случай общего *волнового уравнения* для так называемых линейных сред. В таких средах малое изменение внешней силы, приложенной к малому объему среды, вызывает пропорциональную этому изменению деформацию объема. Для таких сред уравнение вида (55) выводится из второго закона Ньютона. При этом значение скорости u определяется через параметры среды, в частности, через плотность среды ρ и коэффициенты, характеризующие упругость. Например: для продольных волн в твердом тонком стержне $u = \sqrt{E/\rho}$ (E – модуль Юнга материала стержня), для поперечных волн в твердом теле $u = \sqrt{G/\rho}$ (G – модуль сдвига), для поперечных волн в струне $u = \sqrt{F/\rho S}$ (F – сила натяжения струны, S – площадь ее сечения). Для звуковых волн в газе $u = \sqrt{\gamma p/\rho}$ (γ – коэффициент Пуассона, p давление газа).

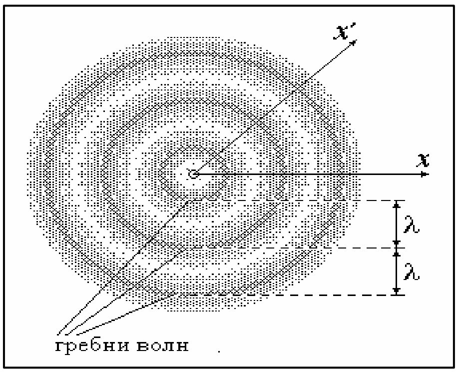


Рис. 16. Сферическая волна

3.3. Виды волн

Волна, распространяясь от источника, охватывает все новые и новые области пространства. Если источник колебаний очень мал (точечный источник), то волны от него радиально расходятся во все стороны,

так как это показано на рис. 16. Имеем радиальный *пучок лучей*. Вдоль луча x, как и вдоль луча x', распространение колебаний в случае гармонической волны происходит по закону (54). Вектор, численно равный волновому числу k и направленный вдоль направления распространения волны, называется *волновым вектором*. Волновые поверхности в изотропной среде (т.е. среде, свойства которой не зависят от направления), перпендикулярна волновому вектору. В рассматриваемом случае волновые поверхности (например, гребни волны) являются сферами. Такая волна называется *сферической*.

Амплитуда сферической волны от луча к лучу более или менее существенно меняется во всех случаях (так, что величина волновой функции на фронте сферической волны в разных точках фронта разная). *Изотропного точечного источника*, т.е. излучающего одинаковую плотность энергии во всех направлениях, не существует. Однородная сферическая волна невозможна.

В *плоской* волне все лучи, вдоль которых она распространяется, параллельны друг другу, например, параллельны оси x на рис. 17. В однородной среде колебание вдоль всех параллельных лучей распространяется с одинаковой фазовой скоростью u . Значит, все волновые поверхности являются плоскостями.

Кроме плоских и сферических волн можно выделить также волны *цилиндрические*, у которых волновые поверхности – концентрические источнику цилиндры. Такие волны возбуждаются нитевидными или щелевыми источниками.

Среди волн разнообразной физической природы выделяют помимо упругих волн и волн на поверхности жидкости также *электромагнитные* и плазменные волны. Особенно большое значение в природе и технике играют электромагнитные волны.

Понятие длины волны применимо не только для гармонических волн. Вообще говоря, волновым процессом называется распространение любого, в том числе непериодического, колебания, например одиночного импульса электромагнитного или звукового поля. Ясно, что такой процесс нельзя охарактеризовать какой-то определенной длиной волны. Однако и для случая одиночного импульса и для любого другого волнового процесса, переносимое в пространстве колебание, как показывается в курсе математической физики, можно представить как суперпозицию синусоидальных колебаний со всевозможными частотами, образующими т.н. *сплошной спектр*. В итоге, даже такой непериодический волновой процесс,

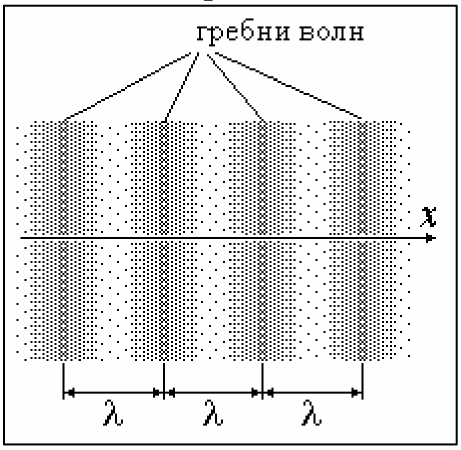


Рис. 17. Плоская волна

как распространение одиночного импульса можно описать как суперпозицию периодических волновых процессов, характеризующихся различными длинами волн.

Распространение периодической волны вдоль луча сопровождается переносом энергии. Например, пусть речь идет о гармонических во времени колебаниях электрического поля. Плотность энергии электрического поля в пространстве, как нам известно, равна $w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 / 2$, и пусть в момент времени $t=0$ колебание в плоскости (x=0) находится в фазе максимума. Тогда

$w(t=0, x=0) = \varepsilon_0 \varepsilon E_{max}{}^2 / 2$. Геометрическое место точек, в котором значение плотности энергии равно этой величине, т.е. гребень волны, распространяется вдоль x со скоростью u. Таким образом, плотность энергии колебаний электрического поля переносится вдоль оси x точно так же, как переносится фаза колебания. Такое распространение колебаний, которое проявляется в переносе его энергии, называется *бегущей волной.* Отметим, что в случае негармонических колебаний, скорость переноса энергии может отличаться от фазовой скорости (см. ниже).

Существуют распределенные в пространстве колебания такие, что вдоль некоторого направления меняется только их амплитуда, а фаза остается неизменной. В этом случае и энергия колебания, очевидно, не переносится. Здесь надо различать два случая. Первый случай, когда амплитуда $A_{ст}$ колебаний в пространстве меняется осциллирующим образом. Например, вдоль оси x, по закону

$$A_{ст}(x) = B\sin(kx+\alpha)\ , \tag{56}$$

где α – некоторая константа. Для волновой функции при этом имеем

$$\xi = A_{ст}(x)\sin\omega t\ . \tag{57}$$

Такой колебательный процесс является суперпозицией двух бегущих волн, а соответствующее ему колебание называется стоячей волной (рис. 18). Точки, в которых амплитуда колебания максимальна, называются *пучностями*, а точки, в которых она равна нулю –*узлами*.

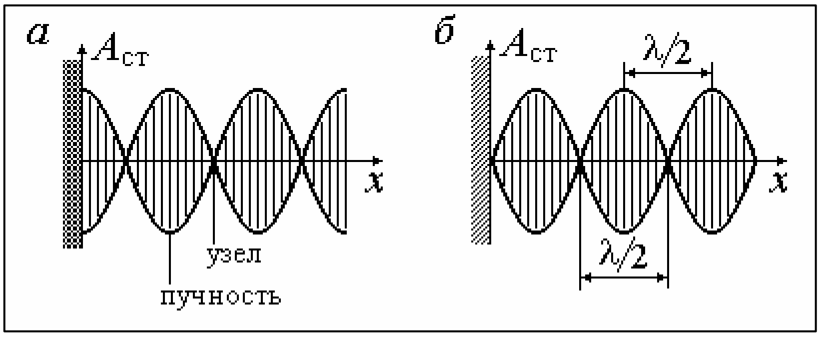


Рис. 18. Распределение амплитуды стоячей волны вдоль оси x для случаев, когда стоячая волна образуется в результате отражения упругой бегущей волны от границы раздела данной среды с а) менее плотной средой и б) более плотной средой.

Второй случай, когда амплитуда колебания меняется вдоль координатной оси, обычно по экспоненциальному закону или близкому к нему (а фаза не меняется – колебания везде синфазны). Такие колебания называют *эванесцентными волнами,* хотя соответствующий колебательный процесс, строго говоря, нельзя назвать волновым (и фаза колебания и энергия не переносятся).

Отметим, что любое распределенное в пространстве колебание (когда в разных точках пространства каким угодно образом распределены и амплитуда и фаза колебания), как показывается в математической физике, можно представить как суперпозицию бегущих и эванесцентных волн.

В курсе оптики рассматриваются среды, называемые анизотропными, в которых при волновом процессе направление переноса фазы не совпадает с направлением переноса энергии. При этом для описания волны вводят два вектора, численно равных k, один – волновой, направленный вдоль направления переноса фазы и другой – лучевой, направленный вдоль направления переноса энергии, которое в таких средах и принимается за направление распространения волны, т.е. за луч.

3.4. Волновой пакет. Групповая скорость

Основываясь на принципе суперпозиции (справедливом в так называемых линейных средах), любую негармоническую волну можно заменить эквивалентной системой синусоидальных волн, называемой *волновым пакетом* (иначе – *волновой группой*). Совокупность значений частот гармонических волн, составляющих пакет, называют спектром. Спектр может быть сплошным, дискретным и смешанным. Сплошным является, например, спектр электромагнитного излучения горячих тел (спектр теплового излучения). Дискретный спектр наблюдается в излучении многих газовых разрядов. Пример смешанного спектра дает излучение звезд.

Простейшим волновым пакетом является так называемая квазигармоническая волна (иначе – *волновой цуг*), получающаяся как результат наложения двух гармонических волн с одинаковыми амплитудами A и распространяющимися вдоль одного луча, но имеющими немного различающиеся частоты. Пользуясь представлением суммы синусов через произведение, волновую функцию цуга нетрудно представить в виде

$$\Psi = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega\, t - \Delta k x}{2}\right)\sin(\omega\, t - kx), \qquad (58)$$

где через $\Delta\omega$ обозначена разность частот гармонических волн, а через ω – их среднеарифметическая частота. Величина

$$B(t,x) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega\, t - \Delta k x}{2}\right) \qquad (59)$$

медленно меняется во времени и в пространстве. Эта функция называется *огибающей* цуга. Это тоже как бы бегущая гармоническая волна, модулирующая по амплитуде бегущую синусоиду частоты ω. Ее длина волны $\Lambda=2\pi/\Delta k$ – гораздо больше длины волны синусоиды с частотой ω, а скорость распространения, называемая *групповой скоростью,* равна

$$v = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \qquad (60)$$

Можно показать, что именно групповая скорость является скоростью переноса энергии цуга.

3.5. Волновое уравнение для электромагнитных волн. Скорость электромагнитных волн

Запишем первые два уравнения Максвелла в дифференциальной форме для однородного и изотропного диэлектрика:

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (61)$$

и предположим, что поле переменно во времени (т.е. правые части уравнений отличны от нуля), но не зависит от координат x и y, а только от z. Тогда, по определению ротора, имеем

$$(\text{rot}\,\mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (\text{rot}\,\mathbf{H})_x = \frac{\partial H_y}{\partial z}. \qquad (62)$$

Подставив эти соотношения в уравнения Максвелла, первое из этих уравнений продифференцируем по t, а второе – по z. Потом умножим первое на $\varepsilon\varepsilon_0$ и сложим со вторым. Получим

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \varepsilon_0\varepsilon\,\mu_0\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0. \qquad (63)$$

Это уравнение гармонической волны (оно, естественно, оказывается справедливо и для других компонент электромагнитного поля). Таким образом, в однородной среде при отсутствии источников электромагнитное поле оказывается волной, бегущей с фазовой скоростью

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (64)$$

где константа $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ оказывается равной скорости света в вакууме. Этим результатом Дж. К. Максвелл теоретически показал, что свет –

это электромагнитная волна, еще до экспериментального подтверждения своей теории. Знаменатель $\sqrt{\varepsilon\mu}$ в формуле (64) для фазовой скорости описывает замедление волны в диэлектрической среде по сравнению со случаем волны в вакууме. Напомним, что в вакууме диэлектрическая и магнитная проницаемости равны единице.

В области, свободной от зарядов и токов, электромагнитное поле не обязательно является плоской гармонической волной. Оно может быть произвольным пучком лучей данной частоты или волновым пакетом со сложным спектром, но формула (64) для фазовой скорости каждой частотной компоненты остается той же самой.

3.6. Энергия и импульс электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга

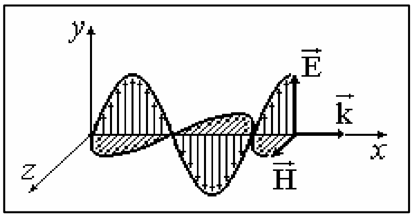


Рис. 19. Электромагнитная волна

Из уравнений Максвелла следует также, что если поле имеет вид плоской волны, то векторы **E** и **H** перпендикулярны направлению распространения (лучу, волновому вектору) и друг другу. Волновой вектор **k,** векторы **E** и **H (**именно в таком порядке) образуют правую тройку векторов (рис. 19). Связь между модулями векторов **E** и **H** в гармонической волне имеет вид

$$E = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}\,H \qquad (65)$$

Множитель в правой части этого уравнения называется *волновым импедансом* среды.

Плотность энергии электромагнитного поля (обозначим ее через w) гармонической электромагнитной волны также является гармонической волновой функцией. Таким образом, w – как и напряженности E и H – представляет колебание, распространяющееся вдоль луча. Это нетрудно доказать, пользуясь общими выражениями для плотностей $w_э$ и $w_м$ энергии электрического и магнитного полей:

$$w = w_э + w_м = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \qquad (65)$$

Переменная составляющая w (“волна энергии”) имеет в гармонической волне ту же фазовую скорость $u = \omega/k$, что и волна напряженности.

Если электрическая напряженность зависит от времени и координат по гармоническому закону

$$E = A\sin(\omega t - kx), \qquad (66)$$

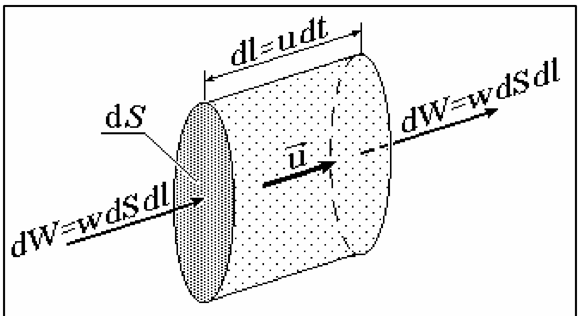
то для плотности энергии волны с помощью соотношений (64) и (65) получаем

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 A^2 \sin^2(\omega t - kx) = EH/u. \qquad (67)$$

Через площадку dS , ориентированную поперек луча, за время dt переносится энергия

$$\mathrm{d}W(x,t) = w(x,t)u\mathrm{d}S\mathrm{d}t. \qquad (68)$$

Смысл этой формулы заключается в том, что энергия за время dt заполняет цилиндр сечением dS (рис.20), длиной $l = u$ dt, откуда за время dt в случае гармонической волны уходит такая же энергия. Отношение энергии волны dW,



передаваемой через поперечную лучу площадку за малый промежуток времени, к этому промежутку времени называется *потоком энергии* (иначе – *потоком лучистой энергии*). Отношение потока энергии через площадку к ее площади называется *плотностью потока энергии* (иначе – *интенсивностью волны*). Таким образом, интенсивность I электромагнитной волны, согласно определению равна

$$I = w\,u. \tag{69}$$

Вектор

$$\mathbf{P} = w\mathbf{u} = [\mathbf{E},\mathbf{H}], \tag{70}$$

численно равный интенсивности электромагнитной волны и направленный вдоль луча, т.е. вдоль направления переноса энергии, называется *вектором Пойнтинга*. Иногда его называют вектором Умова-Пойнтинга, в честь Н.А. Умова, впервые введшего аналогичный вектор для звуковых волн в 1874 – за 20 лет до Дж. Пойнтинга.

Важность введения вектора Пойнтинга обусловлена доказанной Дж. Пойнтингом теоремой, выражающей баланс энергии W внутри некоторого объема V, ограниченного поверхностью S

$$\frac{dW_{\text{ист}}}{dt} = \oint_S P_n dS. \tag{71}$$

В правой части равенства (71) стоит поток вектора Пойнтинга, выражающий убыль электромагнитной энергии в единицу времени в объеме V, восполняемую за счет энергии источника $W_{\text{ист}}$. Если в объеме нет источника, то левая часть рана нулю. Равенство нулю потока вектора Пойнтинга означает, что этот вектор на одной части S направлен внутрь поверхности, а на другой части - наружу, так что электромагнитная энергия проходит через объем V, а не выходит из него.

В электромагнитной волне переносится не только энергия, но и импульс. Действительно, при падении электромагнитной волны на среду в ней начинается механическое движение, связанное с действием электромагнитного поля на заряды внутри атомов (ионов) или молекул вещества.

Основываясь на этом факте, Максвелл в 1873 году предсказал и вычислил величину давления электромагнитной волны на границу раздела двух сред. В 1899-1900 гг. эта теория была подтверждена экспериментами П.Н. Лебедева. Существование давления электромагнитного поля привело А. Эйнштейна к выводу, что электромагнитному полю присущ механический импульс (1905 г.). Импульс, переносимый электромагнитной волной через единичную поперечную площадку за единицу времени, равен w/c. Эта величина является достаточно большой только для излучения мощных лазеров или вблизи звезд, в других случаях импульс и давление электромагнитной волны весьма малы.

Рекомендуемая литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. Пособие: для вузов. В 5 кн. Кн.4. Волны. Оптика – 4-е изд., перераб.– М.: Наука, Физматлит, 1998, сс. 7–18, 41–53.
2. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. Пособие: для вузов.– 5-е изд., стер.– М.: Высш. шк., 1998, сс. 284–294, 297–302.
3. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: Учеб. пособие для вузов.– 2-е изд., испр. и доп.– М.: Высш. шк., 1999, сс. 385–393, 402–408.
4. Иродов И. Е. Волновые процессы. Основные законы: Учеб пособие для вузов.–М.: Лаборатория базовых знаний, 1999, сс. 9–17, 25–29, 37–48.

Вопросы для самоподготовки

1. Как выразить через λ расстояние b между ближайшими точками на оси распространения волны, в которых фазы противоположны (например, между положительным и отрицательным максимумами)? То же самое найти для расстояния l вдоль оси x между максимумом и нулем колебания.
2. Как выразить параметры k и λ через циклическую и линейную частоту?
3. Докажите непосредственным дифференцированием, что гармоническая волновая функция подчиняется волновому уравнению.
4. Докажите, что стоячая волна с волновой функцией $\Psi(x,t)=A(x)\sin\omega t=2\sin kx\sin\omega t$ является результатом сложения двух противоположно направленных гармонических волн одинаковой амплитуды. Найдите их амплитуду.
5. В некоторых средах (называемых анизотропными средами) вектор **E** или вектор **H**, а иногда они оба немного наклонены относительно плоскости, перпендикулярной фазовой скорости **u**. Остаются ли в этом случае совпадающими направления фазовой и групповой скорости? Если нет, то почему?
6. Почему не могут быть поперечными упругие волны в газе?
7. Обладает ли волновым фронтом плоская гармоническая волна в установившемся режиме?
8. Может ли существовать в природе плоская гармоническая волна, или это физическая идеализация, лишь приближенно описывающая реальность? В последнем случае объясните причины того, что гармонические волны в строгом смысле слова не существуют.
9. В чем различие бегущих и стоячих волн, плоских и сферических волн , продольных и поперечных волн?
10. Чем различаются групповая и фазовая скорости волны?

Задачи

1. Движение точки описывается уравнениями:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),\ y = A\sin(\omega t + \varphi_0),\ z = Bt.$$

Найти траекторию, длину пути, пройденного точкой за 2 с, если $\omega = \pi/2$, в момент $t_0 = 0$, $x_0 = 0{,}2$ м, $y_0 = 0$, $B = 0{,}1$ м/с.

2. Материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих согласно уравнениям

$$x = A_1 \sin \omega_1 t; \; y = A_2 \cos \omega_2 t,$$

где $A_1 = 3$ см, $\omega_1 = 1$ рад/с; $A_2 = 2$ см, $\omega_2 = 1$ рад/с. Найти уравнение траектории точки.

3. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями

$$x = A_1 \sin \omega_1 t; \; y = A_2 \cos 2\omega_2 t,$$

где $A_1 = 4$ см, $\omega_1 = 1$ рад/с, $A_2 = 6$ см, $\omega_2 = 1$ рад/с. Найти уравнение траектории точки и построить график.

4. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпен-дикулярных колебаниях:

$$x = 2 \sin \omega t, \; y = 2 \cos \omega t.$$

Найти траекторию движения точки.

5. Движение материальной точки в плоскости задано уравнениями

$$x = A_1 \sin \omega t, \; y = A_2 \sin (\omega t + \pi),$$

где $A_1 = 2 \bullet 10^{-2}$ м, $A_2 = 4 \bullet 10^{-2}$ м. Получить уравнение траектории и начертить график.

6. Материальная точка движется так, что координаты ее заданы уравнениями

$$x = A_1 \sin \omega_1 t, \; y = A_2 \cos 2\omega_1 t,$$

где $A_1 = 4$ см, $\omega_1 = 1$ рад/с, $A_2 = 6$ см. Найти уравнение траектории и построить график.

7. Координаты точки меняются со временем по законам

$$x = A \sin \omega t, \; y = B \sin 2\omega t,$$

где $A = 10$ м, $\omega = 3$ рад/с, $B = 5$ м. Найти траекторию движения точки и построить график.

8. Движение материальной точки в плоскости дается уравнением

$$\mathbf{r} = A \sin \omega t\, \mathbf{i} + B \sin (\omega t + \pi/2)\mathbf{j},$$

где **i** и **j** – орты. Получить уравнение траектории и начертить график, если A = 3 см, B = 6 см, ω = 5 рад/с.

9. Складываются два колебания, совпадающие по направлению:

$$x_1 = \cos \pi t;\ x_2 = \cos \pi(t + 0{,}5).$$

Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, а также написать его уравнение. Дать векторную диаграмму сложения амплитуд.

10. Складываются два гармонических колебания, совпадающие по направлению и выражаемые уравнениями:

$$x_1 = \sin \pi t;\ x_2 = \cos \pi t.$$

Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, написать его уравнение и дать векторную диаграмму сложения амплитуд.

11. Точка участвует одновременно в двух колебаниях:

$$x_1 = 2 \sin \omega t;\ x_2 = \cos 2\omega t.$$

Найти траекторию движения точки, начертить ее с соблюдением масштаба.

12. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями:

$$x_1 = 2 \sin (5\pi t + \pi/2),\ \text{см};\ x_2 = 3 \sin (5\pi t + \pi/6),\ \text{см}.$$

13. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$x = 2 \cos t/2;\ y = -\cos t.$$

Найти уравнение траектории и начертить ее с соблюдением масштаба.

14. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпен-дикулярных колебаниях:

$$x = \sin \pi t \text{ (см)}; \; y = 2 \sin (\pi t + \pi/2) \text{ (см)}.$$

Найти траекторию движения точки и начертить ее с соблюдением масштаба.

15. Складываются два взаимно перпендикулярных движения, заданных уравнениями:

$$x = \cos \pi(t + 1); \; y = 2 \cos \pi t.$$

Найти уравнение траектории и начертить ее с соблюдением масштаба.

16. Два совпадающих по направлению гармонических колебания одного периода с амплитудами по 2 см складываются в одно колебание с амплитудой 1 см. Определить разность фаз складываемых колебаний. Дать векторную диаграмму сложения амплитуд.

17. Материальная точка участвует в двух колебаниях, проис-ходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями:

$$x_1 = \sin t, \; x_2 = \cos t.$$

Найти амплитуду сложного движения, его частоту и начальную фазу; написать уравнение движения.

18. Складываются два гармонических колебания одного направ-ления с одинаковыми периодами T = 1,5 с и амплитудами A = 3 см. Начальные фазы колебаний: $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi/3$. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Написать ее уравнение. Построить с соблюдением масштаба векторную диаграмму сложения амплитуд.

19. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями:

$$x = \sin t/2; \; y = \cos t.$$

Найти уравнение траектории и построить график движения точки.

20. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями:

$$x = 4\cos \pi t;\ y = 8\cos \pi (t + 1).$$

Найти уравнение траектории точки и построить график ее движения.

21. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемые уравнениями

$$x = A_1 \sin \omega_1 t \text{ и } y = A_2 \cos \omega_2 t,$$

где A_1 = 8 см, A_2 = 4 см, $\omega_1 = \omega_2$ = 2 рад/с. Найти уравнение траектории, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения.

22. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t \text{ и } x_2 = A_2 \cos \omega_2 (t + \tau),$$

где $A_1 = A_2$ = 1 см, $\omega_1 = \omega_2 = \pi$ рад/с, τ = 0,5 с. Определить амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Написать его уравнение.

23. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпен-дикулярных колебаниях, уравнения которых

$$x = A_1 \cos \omega_1 t \text{ и } y = A_2 \sin \omega_2 t,$$

где A_1 = 2 см, A_2 = 1 см, $\omega_1 = \omega_2$ = 1 рад/с. Написать уравнение траектории и построить ее на чертеже; показать направление движения точки.

24. Материальная точка участвует в двух колебаниях, проходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t \text{ и } x_2 = A_2 \sin \omega_2 t,$$

где $A_1 = A_2$ = 2 см, $\omega_1 = \omega_2$ = 1 рад/с. Найти амплитуду A сложного движения, его частоту ν и начальную фазу φ_0, написать уравнение движения.

25. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями

$$x = A_1 \cos \omega_1 t \text{ и } y = A_2 \sin \omega_2 t,$$

где $A_1 = 4$ см, $A_2 = 6$ см, $\omega_1 = 2\omega_2 = 4$ рад/с. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже; показать направление движения точки.

26. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпенди-кулярных колебаниях:

$$x = 2 \sin \omega t \text{ и } y = \sin 2\omega t.$$

Найти траекторию движения точки.

27. С помощью векторной диаграммы вычислить амплитуды и начальную фазу результата сложения двух колебаний одного направления:

$$x_1(t) = 3 \cos \omega t \text{ и } x_2(t) = 4 \cos (\omega t + \pi/2).$$

28. Получить уравнение траектории, образованной сложением двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$x = x_0 \cos 2\omega t \text{ и } y = y_0 \cos (3\omega t + \pi/2).$$

29. Найти амплитуду и начальную фазу колебания, полученного при наложении двух колебаний вдоль одного направления:

$$x_1 = 3 \cos (\omega t + \pi/6) \text{ и } x_2 = 4 \cos (\omega t + 2\pi/3).$$

Вычисления провести с использованием векторной диаграммы.

30. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$x = 2 \sin \pi t \text{ и } y = \cos \pi(t + 2).$$

Найти уравнение траектории и построить ее в масштабе.

31. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковым периодом 8 с и одинаковой амплитудой 0,4 м. Разность фаз между этими колебаниями равна $\pi/6$, начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

32. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$x = 4 \sin \pi t,\ y = 6 \sin (\pi t + \pi/2).$$

Найти траекторию движения точки и начертить ее в масштабе.

33. Найти графически амплитуду A колебаний, которые возникают при сложении колебаний одного направления:

$$x_1 = 3\cos(\omega t + \pi/3),\ \ x_2 = 8\sin(\omega t + \pi/6).$$

34. Найти графически амплитуду A колебаний, которые возникают при сложении следующих колебаний одного направления:

$$x_1 = 3\cos\omega t,\ \ x_2 = 5\cos(\omega t + \pi/4),\ x_3 = 6\sin\omega t.$$

35. Точка участвует одновременно в двух колебаниях одного направления, которые происходят по законам:

$$x_1 = A\cos\omega t,\ \ x_2 = A\cos 2\,\omega t.$$

Найти максимальную скорость точки.

36. Точка движется в плоскости xy по закону:

$$x_1 = A\sin\omega t,\ \ y_2 = B\cos\omega t,$$

где A, B и ω – положительные постоянные. Найти ускорение точки **a** в зависимости от ее радиус-вектора **r** относительно начала координат.

37. Найти уравнения траектории точки y(x), если она движется по законам

$$x = A\sin\omega t,\ \ y = A\sin 2\omega t,$$

где A и ω – положительные постоянные. Изобразить график этой траектории.

38. Найти уравнения траектории точки y(x), если она движется по законам

$$x = A\sin\omega t,\ \ y = A\cos 2\omega t,$$

где A и ω – положительные постоянные. Изобразить график этой траектории.

39. Колебательная система состоит из однородного стержня длины L, который может вращаться вокруг горизонтальной оси O, проходящей через его конец и перпендикулярной к оси стержня. Другой конец стержня подвешен на пружине с коэффициентом упругости k. Момент инерции стержня

относительно оси O равен I. В положении равновесия стержень горизонтален. Найти период малых колебаний стержня около положения равновесия.

40. Два незакрепленных шарика массами M_1 и M_2 соединены друг с другом спиральной пружиной с коэффициентом упругости k. Определить период колебаний шаров относительно центра масс системы, которые возникнут при растягивании пружины.

41. Два диска с моментами инерции I_1 и I_2 насажены на общую ось, проходящую через их центры. Осью является стержень с модулем кручения k. Определить период крутильных колебаний одного диска относительно другого с условием, что система свободна.

42. Маятник подвешен на резине, растянутой настолько сильно, что ее первоначальной длиной можно пренебречь. Масса маятника – m, коэффициент упругости резины – k. Определить период горизонтальных гармонических изохронных колебаний маятника сколь угодно большой амплитуды.

43. Маятник подвешен на резине, растянутой настолько сильно, что ее первоначальной длиной можно пренебречь. Масса маятника – m, коэффициент упругости резины – k. Определить период гармонических изохронных круговых движений маятника сколь угодно большой амплитуды в вертикальной плоскости.

44. Пустая стеклянная, запаянная с обоих концов, трубка опущена в жидкость в вертикальном положении так, что часть ее находится на поверхности. Вычислить период малых колебаний трубки, если ей сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса трубки m = 50 г, радиус трубки R = 3,2 мм, плотность жидкости $\rho = 1$ г/см^3. Сопротивление жидкости настолько мало, что им можно пренебречь.

45. Частица массы m может совершать незатухающие гармонические колебания под действием упругой силы с коэффициентом K. Когда частица находилась в состоянии равновесия, к ней приложили постоянную силу F, которая действовала в течение τ секунд. Найти амплитуду колебаний частицы после окончания действия этой силы. Изобразить примерный график колебаний x(t). Исследовать возможные случаи.

46. Стержень длиной L = 40 см колеблется около оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его верхний конец. Определить период колебаний такого маятника.

47. На стержне длиной L = 30 см укреплены два одинаковых грузика: один – в середине стержня, другой – на одном из его концов. Стержень с

грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину L и период T колебаний. Массой стержня пренебречь.

48. Однородный диск радиусом $R = 30$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Определить период T колебаний диска.

49. Диск радиусом $R = 24$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса перпендикулярно плоскости диска. Определить частоту ν колебаний такого физического маятника.

50. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид

$$x = A \sin \omega t,$$

где $A = 5$ см, $\omega = 2$ рад/с. В момент, когда на точку действовала возвращающая сила $F = 5$ мН, точка обладала потенциальной энергией $U = 0{,}1$ мДж. Найти этот момент времени t и соответствующую ему фазу φ колебания.

51. Материальная точка массой $m = 0{,}1$ г колеблется согласно уравнению

$$x = A \sin \omega t,$$

где $A = 5$ см, $\omega = 20$ рад/с. Определить максимальные значения возвращающей силы F и кинетической энергии T точки.

52. Материальная точка массой $m = 0{,}01$ кг совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид

$$x = A \sin \omega t,$$

где $A = 0{,}2$ м, $\omega = 8$ рад/с. Найти возвращающую силу F в момент времени $t = 0{,}1$ с, а также полную энергию E точки.

53. Уравнение колебания материальной точки

$$x = 5 \sin 4t,$$

где длина – в сантиметрах, время – в секундах. Определить максимальную величину возвращающей силы, а также кинетическую энергию точки, если ее масса равна 0,4 г.

54. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?

55. Найти период малых вертикальных колебаний шарика массы $m = 40$ г, укрепленного на середине горизонтально натянутой струны длины $L = 1$ м. Натяжение струны считать постоянным и равным $F = 10$ Н.

56. Определить период малых колебаний математического маятника – шарика, подвешенного на нити длины $L = 20$ см, если он находится в жидкости, плотность которой в $\eta = 3$ раза меньше плотности шарика. Сопротивление жидкости считать настолько малым, что им можно пренебречь.

57. Два физических маятника совершают малые колебания вокруг одной и той же горизонтальной оси с частотами ω_1 и ω_2. Их моменты инерции относительно данной оси равны соответственно I_1 и I_2. Маятники привели в состояние устойчивого равновесия и скрепили друг с другом. Какова будет частота малых колебаний составного маятника?

58. Тонкая однородная пластинка в форме равностороннего треугольника с высотой h совершает малые колебания вокруг гори-зонтальной оси, совпадающей с одной из его сторон. Найти период колебаний данного маятника.

59. Через сколько времени энергия колебаний камертона с частотой $\nu = 600$ Гц уменьшится в $n = 10^6$ раз, если логарифмический декремент затухания равен 0,0008?

60. Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания $\lambda_1 = 1{,}5$. Каким будет значение λ_2, если сопротивление среды увеличить в $n = 2$ раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможными?

61. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\lambda = 0{,}2$. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

62. Найти логарифмический декремент затухания λ математического маятника, если за время $t = 1$ мин амплитуда колебаний уменьшилась в два раза? Длина маятника $L = 1$ м.

63. За время t = 16,1 с амплитуда колебаний уменьшилась в пять раз. Найти коэффициент затухания.

64. За время t = 16,1 с амплитуда колебаний уменьшилась в пять раз. За какое время t амплитуда уменьшится в е раз?

65. За t = 100 с система совершает n = 100 колебаний. За это же время амплитуда колебаний А уменьшается в 2,7 раз. Чему равен коэффициент затухания?

66. За t = 100 с система совершает n = 100 колебаний. За это же время амплитуда колебаний А уменьшается в 2,7 раз. Чему равен логарифмический декремент затухания λ?

67. Зависимость координаты от времени свободных затухающих колебаний

$$x = A_0\, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Найти амплитуду и начальную фазу колебаний для начальных условий

$$x(0) = 0,\ V(0) = V_0.$$

68. Зависимость координаты от времени свободных затухающих колебаний

$$x = A_0\, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Найти амплитуду и начальную фазу колебаний для начальных условий

$$x(0) = x_0,\ V(0) = 0.$$

69. Чему равен логарифмический декремент затухания математического маятника, если за одну минуту амплитуда колебаний уменьшилась в два раза. Длина маятника 2 м.

70. Математический маятник длиной 0,5 м имеет добротность 400. Сколько времени потребуется, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась на 2/3?

71. Гармонический осциллятор теряет за период 9 % энергии колебаний. На сколько процентов его частота отличается от собственной частоты колебаний ω_0?

72. Логарифмический декремент затухания колебаний матема-тического маятника равен 0,01. Сколько полных колебаний должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза?

73. Определить логарифмический декремент затухания матема-тического маятника длиной L = 50 см, если за время t = 8 мин он теряет 99 % своей энергии.

74. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за две минуты уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за три минуты?

75. Затухающие колебания точки происходят по закону:

$$x = A\, e^{-\delta t} \sin \omega t.$$

Найти скорость точки в момент t = 0.

76. Затухающие колебания точки происходят по закону:

$$x = A\, e^{-\delta t} \sin \omega t.$$

Найти моменты времени, когда точка достигает крайних положений.

77. Тело совершает крутильные колебания по закону:

$$\varphi = \varphi_0\, e^{-\delta t} \cos \omega t.$$

Найти угловую скорость тела в момент t = 0.

78. Тело совершает крутильные колебания по закону:

$$\varphi = \varphi_0\, e^{-\delta t} \cos \omega t.$$

Найти угловое ускорение тела в момент t = 0.

79. Тело совершает крутильные колебания по закону:

$$\varphi = \varphi_0\, e^{-\delta t} \cos \omega t.$$

Найти моменты времени, когда угловая скорость становится максимальной.

80. Некоторая точка совершает затухающие колебания с частотой ω = 25 рад/с. Найти коэффициент затухания δ, если в начальный момент скорость точки равна нулю, а ее смещение из положения равновесия в η = 1,02 раза меньше амплитуды в этот момент.

81. Точка совершает затухающие колебания с частотой ω и коэффициентом затухания δ. Найти амплитуду скорости точки как функцию времени t, если в момент $t_0 = 0$ амплитуда ее смещения равна A.

82. Точка совершает затухающие колебания с частотой ω и коэффициентом затухания β. Найти амплитуду скорости точки как функцию времени t, если в момент $t_0 = 0$ смещение точки $x(0) = 0$ и проекция ее скорости $v_x(0) = v_0$.

83. Имеются два затухающих колебания с известными периодами T и коэффициентами затухания δ: $T_1 = 0{,}1$ мс, $\delta_1 = 100$ с$^{-1}$ и $T_2 = 10$ мс, $\delta_2 = 10$ с$^{-1}$. Какое из них затухает быстрее за один период?

84. К невесомой пружине подвесили грузик, в результате чего она растянулась на $\Delta x = 9{,}8$ см. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\lambda = 3{,}1$.

85. Найти добротность осциллятора, у которого амплитуда смещения уменьшается в $\eta = 2$ раза через каждые $n = 110$ колебаний.

86. Найти добротность математического маятника длины $L = 50$ см, если за промежуток времени $\tau = 5{,}2$ мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4 \cdot 10^4$ раз.

87. Период затухающих колебаний – 4 с, логарифмический де-кремент затухания – 1,6, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при $t = T/4$ равно 4,5 см. Написать уравнение движения этого колебания. Построить график этого колебательного движения в пределах двух периодов.

88. Построить график затухающего колебания, уравнение которого дано в виде:

$$x = e^{-0{,}1t} \sin \pi t/4, \text{ м.}$$

89. Уравнение затухающих колебаний дано в виде:

$$x = 5\, e^{-0{,}25t} \sin \pi t/2, \text{ м.}$$

Найти скорость колеблющейся точки в моменты времени: 0, T, 2T, 3T и 4T.

90. Логарифмический декремент затухания математического маятника равен 0,2, Найти, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника.

91. Чему равен логарифмический декремент затухания матема-тического маятника, если за 1 мин амплитуда колебаний уменьшилась в два раза? Длина маятника 1 м.

92. Математический маятник длиной 24,7 см совершает затухающие колебания. Через сколько времени энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания: а) $\lambda = 0{,}01$ и б) $\lambda = 1$.

93. Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания, равным 0,2. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

94. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за 3 мин?

95. Математический маятник длиной 0,5 м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 5 см, а при втором (в ту же сторону) – на 4 см. Найти время релаксации.

96. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на 9,8 см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания, чтобы груз возвращался в положение равновесия апериодически?

97. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на 9,8 см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания, чтобы логарифмический декремент затухания был равен 6?

98. Железный шарик, подвешенный на тонкой нити длиной 40 см, находится в глицерине. Сила трения, действующая на шарик определяется законом Стокса

$$F_{тр} = 6\eta r v,$$

где η – коэффициент вязкости (для глицерина он ранен 0,35 кг/м • с), r – радиус шара, v – скорость. Найти предельное значение радиуса шарика, разграничивающее апериодическое движение от периодического. Шарик считать математическим маятником.

99. Гиря массой m = 400 г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k = 40 Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления для этой системы составляет 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону:

$$F = \cos \omega_в t.$$

Определить частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна.

100. Тело совершает вынужденные колебания. При частоте 200 Гц амплитуда колебаний A_1 = 10 см, при частоте 210 гц амплитуда A_2 = 4 см. Найти коэффициент затухания системы и собственную частоту колебаний, если удельная амплитуда вынуждающей силы равнялась 210 Н/г.

101. На тело массой m = 10 г действует сила упругости с коэффициентом k = 4 Н/м, сила трения среды и периодическая вынуждающая сила

$$F = 10k \cos 120t.$$

Какой коэффициент трения соответствует амплитуде смещения 8 см? Чему равна средняя кинетическая анергия за половину периода в этом случае?

102. Амплитуда вынужденных колебаний гармонического осциллятора достигает значения 28,6 F_0/m при резонансе на частоте 382 Гц. Чему равна добротность системы?

103. Шарик массы m может совершать незатухающие гармонические колебания около точки x = 0 с собственной частотой ω_0. В момент t = 0, когда шарик находился в состоянии равновесия, к нему приложили вынуждающую силу

$$F = F_0 \cos \omega_в t,$$

совпадающую по направлению с осью x. Найти уравнение вынужденных колебаний шарика x(t).

104. Частица массы m может совершать незатухающие гармонические колебания под действием упругой силы с коэффициентом k. Когда частица находилась в состоянии равновесия, к ней приложили постоянную силу F, которая действовала в течение t секунд. Найти амплитуду колебаний частицы после окончания действия этой силы. Изобразить примерный график колебаний x(t). Исследовать возможные случаи.

105. Шарик массы m, подвешенный к пружинке, удлиняет последнюю на величину ΔL. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по гармоническому закону с амплитудой F_0, шарик совершает вынужденные колебания. Логарифмический декремент затухания равен λ. Пренебрегая массой пружинки, найти круговую частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда смещения шарика максимальна. Каково значение этой амплитуды?

106. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах ω_1 = 400 рад/с и ω_2 = 600 рад/с равны между собой. Найти частоту, при которой амплитуда смещения максимальна.

107. При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения. Найти частоту, соответствующую резонансу скорости.

108. При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения. Найти коэффициент затухания δ и частоту затухающих колебаний ω частицы.

109. Некоторая резонансная кривая соответствует механической колебательной системе с логарифмическим декрементом затухания λ = 1,6. Найти для этой кривой отношение максимальной амплитуды смещения к амплитуде смещения при очень малой частоте.

110. Под действием внешней вертикальной силы

$$F = F_0 \cos \omega_в t$$

тело, подвешенное на пружинке, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону

$$x = A \cos (\omega_в t - \varphi).$$

Найти работу силы F за период колебания.

111. Шарик массы m = 50 г подвешен на невесомой пружинке жесткости k = 20 Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой $\omega_в$ = 25 рад/с шарик совершает установившиеся колебания с амплитудой A = 1,3 см. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = 3\pi/4$. Найти добротность данного осциллятора.

112. Шарик массы m = 50 г подвешен на невесомой пружинке жесткости k = 20 Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой $\omega_в$ = 25 рад/с шарик совершает установившиеся колебания с амплитудой А = 1,3 см. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = 3\pi/4$. Найти работу вынуждающей силы за период колебания.

113. Шарик массы m, подвешенный на невесомой пружинке, может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания δ. Собственная частота колебаний равна ω_0. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по закону

$$F = F_0 \cos \omega_в t,$$

шарик совершает установившиеся гармонические колебания. Найти среднюю за период мощность силы F.

114. Шарик массы m, подвешенный на невесомой пружинке, может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания δ. Собственная частота колебаний равна ω_0. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по закону

$$F = F_0 \cos \omega_в t,$$

шарик совершает установившиеся гармонические колебания. Найти частоту $\omega_в$ силы F, при которой средняя мощность силы максимальна.

115. Гирька массой 0,2 кг, висящая на вертикальной пружине, совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания 0,75 $с^{-1}$. Коэффициент деформации пружины равен 0,5 кг/см. Начертить зависимость амплитуды А вынужденных колебаний гирьки от частоты $\omega_в$ внешней периодической силы, если известно, что наибольшее значение внешней силы равно 0,98 Н. Для построения графика найти значения А для следующих частот: $\omega_в = 0$, $\omega_в = 0{,}5\ \omega_0$, $\omega_в = 0{,}75\ \omega_0$, $\omega_в = \omega_0$, $\omega_в = 1{,}5\ \omega_0$ и $\omega_в = 2\ \omega_0$, где ω_0 – частота собственных колебаний подвешенной гири.

116. По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии 30 см друг от друга. По этой дороге покатили детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на 2 см под действием груза в 1 кг. С какой скоростью катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски 10 кг.

117. Тело массой m = 10 г совершает затухающие колебания с начальной фазой, равной нулю, и коэффициентом затухания, равным 1,6 $с^{-1}$. На это тело

начала действовать внешняя периодическая сила, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$x = 5 \sin (10\pi t - 0{,}75\ \pi),\ \text{см}.$$

Найти уравнение (с числовыми коэффициентами) внешней периодической силы.

118. Тело совершает вынужденные колебания. При частоте 200 Гц амплитуда колебаний A_1 = 10 см, при частоте 210 гц амплитуда A_2 = 4 см. Найти коэффициент затухания системы и собственную частоту колебаний, если удельная амплитуда вынуждающей силы равнялась 210 Н/г.

119. На тело массой m = 10 г действует сила упругости с коэффициентом k = 4 Н/м, сила трения среды и периодическая вынуждающая сила

$$F = 10k \cos 120t.$$

Какой коэффициент трения соответствует амплитуде смещения 8 см? Чему равна средняя кинетическая анергия за половину периода в этом случае?

120. Амплитуда вынужденных колебаний гармонического осцил-лятора достигает значения 28,6 F_0/m при резонансе на частоте 382 Гц. Чему равна добротность системы?

121. Шарик массы m может совершать незатухающие гармонические колебания около точки x = 0 с собственной частотой ω_0. В момент t = 0, когда шарик находился в состоянии равновесия, к нему приложили вынуждающую силу

$$F = F_0 \cos \omega_в t,$$

совпадающую по направлению с осью x. Найти уравнение вынужденных колебаний шарика x(t).

122. Частица массы m может совершать незатухающие гармо-нические колебания под действием упругой силы с коэффициентом k. Когда частица находилась в состоянии равновесия, к ней приложили постоянную силу F, которая действовала в течение t секунд. Найти амплитуду колебаний частицы после окончания действия этой силы. Изобразить примерный график колебаний x(t). Исследовать возможные случаи.

123. Шарик массы m, подвешенный к пружинке, удлиняет последнюю на величину ΔL. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по

гармоническому закону с амплитудой F_0, шарик совершает вынужденные колебания. Логарифмический декремент затухания равен λ. Пренебрегая массой пружинки, найти круговую частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда смещения шарика максимальна. Каково значение этой амплитуды?

124. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах $\omega_1 = 400$ рад/с и $\omega_2 = 600$ рад/с равны между собой. Найти частоту, при которой амплитуда смещения максимальна.

125. При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения. Найти частоту, соответствующую максимуму скорости.

126. При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения амплитуды. Найти коэффициент затухания δ и частоту затухающих колебаний ω частицы.

127. Некоторая резонансная кривая соответствует механической колебательной системе с логарифмическим декрементом затухания $\lambda = 1{,}6$. Найти для этой кривой отношение максимальной амплитуды смещения к амплитуде смещения при очень малой частоте.

128. Под действием внешней вертикальной силы

$$F = F_0 \cos \omega_в t$$

тело, подвешенное на пружинке, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону:

$$x = A \cos (\omega_в t - \varphi).$$

Найти работу силы F за период колебания.

129. Шарик массы m = 50 г подвешен на невесомой пружинке жесткости k = 20 Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой $\omega_в = 25$ рад/с шарик совершает установившиеся колебания с амплитудой A = 1,3 см. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = 3\pi/4$. Найти добротность данного осциллятора.

130. Шарик массы m = 50 г подвешен на невесомой пружинке жесткости k = 20 Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой $\omega_в = 25$ рад/с шарик совершает установившиеся колебания с амплитудой A = 1,3 см. При этом смещение шарика отстает по фазе от

вынуждающей силы на $\varphi = 3\pi/4$. Найти работу вынуждающей силы за период колебания.

131. Шарик массы m, подвешенный на невесомой пружинке, может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания δ. Собственная частота колебаний равна ω_0. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по закону

$$F = F_0 \cos \omega_в t,$$

шарик совершает установившиеся гармонические колебания. Найти среднюю за период мощность силы F.

132. Шарик массы m, подвешенный на невесомой пружинке, может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания δ. Собственная частота колебаний равна ω_0. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по закону

$$F = F_0 \cos \omega_в t,$$

шарик совершает установившиеся гармонические колебания. Чему равна максимальная мгновенная мощность?

133. Гирька массой 0,2 кг, висящая на вертикальной пружине, совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания 0,75 $с^{-1}$. Коэффициент деформации пружины равен 0,5 кг/см. Начертить зависимость амплитуды A вынужденных колебаний гирьки от частоты ω внешней периодической силы, если известно, что наибольшее значение внешней силы равно 0,98 Н. Для построения графика найти значения A для следующих частот: $\omega_в = 0$, $\omega_в = 0{,}5\ \omega_0$, $\omega_в = 0{,}75\ \omega_0$, $\omega_в = \omega_0$, $\omega_в = 1{,}5\ \omega_0$ и $\omega_в = 2\ \omega_0$, где ω_0 – частота собственных колебаний подвешенной гири.

134. По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии 30 см друг от друга. По этой дороге покатили детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на 2 см под действием груза в 1 кг. С какой скоростью катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски 10 кг.

135. Тело массой m = 10 г совершает затухающие колебания с максимальным значением амплитуды 7 см, начальной фазой, равной нулю, и коэффициентом затухания, равным 1,6 $с^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$x = 5 \sin (10\pi t - 0{,}75\,\pi),\ \text{см}.$$

Найти: 1) уравнение (с числовыми коэффициентами) собственных колебаний, 2) уравнение (с числовыми коэффициентами) внешней периодической силы.

136. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 1000$ Гц. Определить частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_р = 998$ Гц.

137. Определить, насколько резонансная частота отличается от частоты $\nu_0 = 1$ кГц собственных колебаний системы, характеризуемой коэффициентом затухания $\delta = 400\ с^{-1}$.

138. Определить логарифмический декремент затухания λ колебательной системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты $\nu_0 = 10$ кГц на $\Delta\nu = 2$ Гц.

139. Период T_0 собственных колебаний пружинного маятника равен 0,55 с. В вязкой среде период T того же маятника стал равным 0,56 с. Определить резонансную частоту колебаний.

140. Пружинный маятник (жесткость k пружины равна 10 Н/м, масса m груза равна 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $2 \cdot 10^{-2}$ кг/с. Определить коэффициент затухания δ и резонансную амплитуду $A_р$, если амплитудное значение вынуждающей силы $F_0 = 10$ мН.

141. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления 1 г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_р = 0{,}5$ см и частота ν_0 собственных колебаний равна 10 Гц.

142. Амплитуды вынужденных гармонических колебаний при частоте $\nu_1 = 400$ Гц и $\nu_2 = 600$ Гц равны между собой. Определить резонансную частоту $\nu_р$. Затуханием пренебречь.

143. К спиральной пружине жесткостью k = 10 Н/м подвесили грузик массой m = 10 г и погрузили всю систему в вязкую среду. Приняв коэффициент сопротивления равным 0,1 кг/с, определить частоту ν_0 собственных колебаний.

144. К спиральной пружине жесткостью k = 10 Н/м подвесили грузик массой m = 10 г и погрузили всю систему в вязкую среду. Приняв коэффициент сопротивления равным 0,1 кг/с, определить резонансную амплитуду $A_р$, если

вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону и ее амплитудное значение $F_0 = 0{,}02$ Н.

145. К спиральной пружине жесткостью $k = 10$ Н/м подвесили грузик массой $m = 10$ г и погрузили всю систему в вязкую среду. Приняв коэффициент сопротивления равным 0,1 кг/с, определить резонансную частоту $\nu_р$.

146. Во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний будет меньше резонансной амплитуды, если частота изменения вынуждающей силы будет больше резонансной частоты на 10 %? Коэффициент затухания δ принять равным $0{,}1\ \omega_0$ (ω_0 – круговая частота собственных колебаний).

147. Определить резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний $\nu_0 = 300$ Гц, а логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}2$.

148. Собственная частота ν_0 колебаний некоторой системы составляет 500 Гц. Определить частоту ν затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота $\nu_р = 499$ Гц.

149. Гиря массой $m = 0{,}5$ кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону

$$F = 0{,}1 \cos \omega_в t, \text{ в Ньютонах.}$$

Определить для данной колебательной системы:

а) коэффициент затухания;

б) резонансную амплитуду $A_р$.

150. Гиря массой $m = 400$ г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 40$ Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления для этой системы составляет 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону

$$F = \cos \omega_в t, \text{ (в Ньютонах).}$$

Определить амплитуду вынужденных колебаний, если частота вынуж-дающей силы, вдвое меньше собственной частоты колебаний.

151. Гиря массой $m = 20$ г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом

сопротивления α = 0,2 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону

$$F = 0,2 \cos \omega_в t, \text{ в Ньютонах.}$$

Определить:

а) частоту $\nu_в$ вынужденных колебаний;

б) резонансную частоту;

в) резонансную амплитуду.

152. Найти разность фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе смещения, если собственная частота колебаний ω_0 = 50 рад/с и коэффициент затухания δ = 5,2 $с^{-1}$.

153. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах ω_1 = 400 рад/с и ω_2 = 600 рад/с равны между собой. Найти частоту ω, при которой амплитуда смещения максимальна.

154. Найти максимальное значение амплитуды смещения осциллятора, совершающего установившееся колебание под действием вынуждающей гармонической силы с амплитудой F_0 = 2,5 Н, если частота затухающих колебаний данного осциллятора ω = 100 рад/с и коэффициент сопротивления α = 0,5 кг/с.

155. Гиря массой m = 400 г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k = 40 Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления для этой системы составляет 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону

$$F = \cos \omega_в t.$$

Определить резонансную амплитуду.

Ирина Васильевна Поленц

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Методическое пособие
для студентов всех специальностей
Часть 1

Редактор С.В. Пилюгина

620034, Екатеринбург, ул., Колмогорова, 66, УрГУПС
Редакционно-издательский отдел

Подписано в печать

Бумага писчая №1 Усл. печ. л. 2,6

Тираж 100 экз. Формат 60х84 1/16 Заказ